E.N.S.E.T. Section A3 (Programme C) 1978

Durée : 4 heures

Dans le problème, on désigne par E *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, 2 fois continûment dérivables dans* $\mathbb{R} - \{1\}$, *par* E′ *le sous-espace des fonctions de ce type qui sont, en outre, continues au point* 1, *par* F *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues dans* $\mathbb{R} - \{1\}$. *Pour tout n entier,* P_n *désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus égal à n, il sera considéré comme sous-espace vectoriel de* E *et de* F.

On étudie l'application T, *définie sur* E *qui, à toute fonction f, élément de* E, *fait correspondre la fonction* Tf *telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad : \quad Tf(x) = 2f'(x) + (x-1)f''(x).$$

Première partie

a. Montrer que T est une application linéaire de E dans F et que sa rectriction à P_n est un endomorphisme de P_n.

b. En utilisant la base canonique de P_n, trouver l'image matricielle de la restriction T/P_n. Déterminer les vecteurs propres de cette restriction. Cette restriction est-elle diagonalisable? Étant donné un élément P arbitraire de P_n, peut-on trouver un polynôme f de P_n tel que $Tf = P$; sinon déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le degré de P pour qu'il existe une telle solution.

c. On considère le sous-espace vectoriel E″ de E engendré par les fonctions f_α définies par $f_\alpha(x) = e^x[x-1]^\alpha$ où α décrit $\mathbb{Z}$. Montrer que la restriction de T à E″ est un endomorphisme de E″ (on précisera l'image par T d'un générateur f_α). En serait-il de même pour l'espace vectoriel engendré par f_α où $f_\alpha(x) = e^x|x-1|^\alpha$ α étant un réel quelconque?

Deuxième partie

Pour certaines fonctions g, on propose de déterminer, s'il en existe, les fonctions f appartenant à E′ ou à E, solutions de $Tf = g$.

a. Déterminer les solutions f dans E de $Tf = g$ lorsque $g(x) = e^x$. Déterminer les solutions f de cette équation qui sont dans E′. Ces solutions dans E′ sont-elles dérivables au point $x = 1$?

b. Déterminer les solutions f dans E de $Tf = g$ lorsque g est définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} - \frac{\varepsilon}{4\sqrt{|x-1|^3}} + \varepsilon\sqrt{|x-1|}$$

où ε représente le nombre (± 1) vérifiant

$$\varepsilon(x-1) = |x-1|.$$

Existe-t-il des solutions de $Tf = g$ dans E′ ?

Existe-t-il des solutions f appartenant à E telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+1} f(x)\,dx$ soit convergente?

.../...

c. Déterminer les solutions f dans E de $Tf = g$ lorsque $g(x) = \text{Log} \mid 1 - x \mid$. Quelles sont les solutions dans E′ de cette équation? Ces solutions sont-elles dérivables au point $x = 1$?

d. Plus généralement soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que, si G désigne une fonction telle que $G''(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, alors la fonction $f : x \to \dfrac{G(x) - 1}{x - 1}$ est une solution dans E de $Tf = g$. En déduire toutes les solutions dans E de cette équation. En remarquant qu'il existe des fonctions G telles que $G(1) = 1$ trouver les solutions de $Tf = g$ dans E′. Ces solutions sont-elles dérivables au point 1?

Retrouver ainsi des résultats de la question (*a*).

e. On suppose à présent que g est une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini : $g(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$. On demande de prouver qu'il existe des solutions f de $Tf = g$ qui soient développables en série entière dans $\mathbb{R}$ tout entier.

Indications : Si la solution cherchée est définie par $\sum_0^\infty a_n x^n$, on commencera par déterminer a_1, en utilisant par exemple la question précédente, à l'aide de la somme de la série $\sum_0^\infty \dfrac{b_n}{(n+1)(n+2)}$. On en déduira ensuite les coefficients a_n. Pour déterminer le rayon de convergence de la série obtenue on pourra comparer, pour $\mid x \mid > 1 \mid \; a_n x^n \mid$ au reste d'une série convergente.

Retrouver ainsi un résultat de la question *a*.

Troisième partie

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, sur un espace probabilisé donné.
Pour tout k entier, on pose :

$$p_k = P\{X = k\}, \qquad q_k = P\{X > k\}.$$

Les fonctions génératrices $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ des suites (p_k) et (q_k) sont définies par :

$$\mathfrak{P}(s) = \sum_0^\infty p_k s^k = E(s^X)$$

$$\mathfrak{Q}(s) = \sum_0^\infty q_k s^k.$$

On supposera que ces séries convergent quel que soit s.

a. Montrer que $\mathfrak{P}''(s)$ existe quel que soit s et que $T\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}''$. En déduire, en utilisant éventuellement les questions précédentes, une expression de $\mathfrak{Q}(s)$ à l'aide de $\mathfrak{P}(s)$. Montrer que l'espérance mathématique et la variance de X existent et calculer ces nombres à l'aide des valeurs de $\mathfrak{Q}$ et de sa dérivée au point 1.

b. On définit également les fonctions génératrices $\mathfrak{A}(s)$ et $\mathfrak{B}(s)$ des suites (a_k) et (b_k) définies par

$$a_k = P\{X \leqslant k\}, \quad b_k = P\{X > k + 1\}.$$

Déterminer les fonctions $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ à l'aide de $\mathfrak{P}$.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail